DESARROLLO DE COMPETENCIAS PARA EL ANÁLISIS DIDÁCTICO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS[1]

Juan D. Godino, Universidad de Granada
Mauro Rivas, Universidad de los Andes (Venezuela)
Walter F. Castro, Universidad de Antioquia (Colombia)
Patricia Konic, Universidad de Río Cuarto (Argentina)

RESUMEN:

Una de las tareas principales del profesor de matemáticas es el diseño, implementación y evaluación de la propia práctica docente con la finalidad de favorecer el aprendizaje de los estudiantes. Es bien conocida la complejidad de esta labor, si tenemos en cuenta las diversas facetas implicadas y los factores que condicionan la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En esta ponencia presentaremos algunas nociones teóricas que pueden ayudar a reflexionar a los profesores de matemáticas sobre su propia práctica docente, al tiempo que abren nuevas perspectivas de investigación en didáctica de las matemáticas. Estas nociones están basadas en el enfoque teórico sobre el conocimiento matemático y didáctico que describimos como "ontosemiótico"[2], en el cual se tienen en cuenta las dimensiones epistémica (interpretada según una aproximación antropológica), cognitiva (una aproximación semiótica) e instruccional (una aproximación socio-constructivista) del estudio de las matemáticas.

1. COMPETENCIAS DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

El uso del término *competencia* ha penetrado fuertemente en el discurso de la educación matemática, pero sobre todo en el ámbito del desarrollo curricular, de la práctica de la enseñanza y de la evaluación, donde se habla con frecuencia de "enseñar por competencias". En este contexto, competencia es la *capacidad* de afrontar un problema complejo, o de resolver una actividad compleja.

La noción de competencia no deja de ser polémica: ¿Equivale a formación para el trabajo? ¿Supone formación a-teórica?, ¿Es una nueva moda psico-pedagógica? Como afirma Tejada (1999, p. 2), no es fácil acotar el concepto de competencia, lo que se evidencia al hacer una somera revisión de la literatura sobre este campo, y se manifiesta en los continuos esfuerzos dedicados a esta tarea. Los diferentes vaivenes habidos en su concreción desde lo psicológico, pedagógico, laboral, social, etc. indica que este término no es unívoco.

En el caso de las competencias matemáticas, en diversos trabajos Godino y colaboradores (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007) han atribuido a la noción de *conocimiento* el carácter holístico que el enfoque pedagógico/curricular atribuye a la noción de competencia, siendo, por tanto, nociones equivalentes. Desde un punto de vista pragmático, conocer/saber implica el uso

[1] *Actas de las VI Jornadas de Educación Matemática Región de Murcia*. Centro de Profesores y Recursos Murcia, 17-19 Abril 2008.
[2] Trabajos disponibles en http://www.ugr.es/local/jgodino

competente de los objetos constituyentes del conocimiento, la capacidad de relacionar entre sí dichos objetos, o sea, comprender, y de aplicarlos a la solución de problemas.

En el Informe Final del Proyecto Tuning (González y Wagenaar, 2003), las competencias y las destrezas han sido entendidas como "conocer y comprender" —conocimiento teórico de un campo académico—, "saber cómo actuar" —la aplicación práctica y operativa del conocimiento a ciertas situaciones— y "saber cómo ser" —los valores como parte integrante de la forma de percibir a los otros y vivir en un contexto social—. Entre las competencias generales (o transversales) incluidas en el mencionado informe se encuentran las que se clasifican como *instrumentales* (herramientas para el aprendizaje y la formación), donde se mencionan: Análisis y Síntesis; Organización y planificación; Conocimientos generales básicos; Conocimientos básicos de la profesión.

Así mismo, entre las competencias *sistémicas* (capacidades que dan visión de conjunto y sirven para gestionar el total de la actuación) se incluyen, entre otras: Aplicar los conocimientos a la práctica; Habilidades de investigación; Capacidad de aprender (aprender a aprender); Adaptación a nuevas situaciones; Diseño y gestión de proyectos.

Las competencias específicas han sido divididas en dos grandes grupos: aquellas relacionadas con la formación disciplinar que deben adquirir los graduados —competencias disciplinares y académicas (saber) — y las relacionadas con la formación profesional que deben poseer los futuros graduados —competencias profesionales (saber hacer) —.

Aplicadas al caso del profesor de matemáticas estas competencias generales y específicas se pueden concretar en lo que podemos llamar competencia para el "análisis y síntesis didáctica", esto es, competencia para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y para sintetizar el complejo de conocimientos aportados por la Didáctica de la Matemática, para el diseño, implementación y evaluación de su propia práctica docente.

El profesor de matemáticas de educación primaria y secundaria debe tener un cierto nivel de competencia matemática, es decir, conocer y ser capaz de aplicar las prácticas matemáticas necesarias para resolver los tipos de problemas usualmente abordables en primaria y secundaria. Pero desde el punto de vista de la enseñanza y el aprendizaje, el profesor debe ser capaz de analizar la actividad matemática al resolver los problemas, identificando los objetos y significados puestos en juego, con el fin de enriquecer su desempeño y contribuir al desarrollo de sus competencias profesionales.

Una de las tareas clave del profesor de matemáticas es la selección y adaptación de situaciones–problema que promuevan la contextualización de los contenidos matemáticos, su aplicación y ejercitación. Los problemas no pueden ser excesivamente puntuales/aislados, sino que deben permitir la articulación de las distintas competencias matemáticas, y por tanto, tener un carácter globalizador. En el caso de la formación matemática y didáctica de profesores es necesario seleccionar problemas cuya solución ponga en juego competencias de distintos bloques de contenido disciplinar (aritmética, geometría, medida, estocástica, razonamiento algebraico), otras áreas curriculares (conocimiento del medio y la sociedad), y de manera especial que promuevan la articulación entre las competencias de tipo matemático y didáctico.

Pero no es suficiente disponer de "situaciones ricas", se requiere avanzar hacia la organización de configuraciones y trayectorias didácticas (Godino, Contreras y Font, 2006) idóneas desde el punto de vista epistémico, cognitivo e instruccional. Para ello hay que tener en cuenta los roles potenciales del profesor, de los estudiantes, los recursos (en particular la gestión del tiempo didáctico), y los patrones de interacción entre estos componentes de los sistemas didácticos. La organización y gestión de las trayectorias didácticas por parte del profesor le demanda el desarrollo de competencias de análisis de los objetos matemáticos y significados que se ponen en juego en la solución de los problemas matemáticos, a fin de prever conflictos de significados y distintas posibilidades de institucionalización de los conocimientos matemáticos implicados.

2. COMPETENCIAS DE ANÁLISIS DIDÁCTICO Y SU DESARROLLO

A continuación incluimos un esquema de clasificación de las competencias específicas para la formación didáctica de los profesores, teniendo en cuenta algunos aspectos del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática desarrollado por Godino y colaboradores (Godino, Batanero y Font, 2007).

1. Competencias referidas al diseño e implementación de procesos de estudio matemático:

- Seleccionar y reelaborar los *problemas matemáticos* idóneos para los alumnos de los distintos niveles, usando los recursos lingüísticos y medios apropiados en cada circunstancia.

- *Definir, enunciar y justificar* los *conceptos, procedimientos* y *propiedades* matemáticas, teniendo en cuenta las nociones previas necesarias y los procesos implicados en su generación.

- Implementar *configuraciones didácticas* que permitan identificar y resolver los *conflictos semióticos* en la *interacción didáctica* y optimizar el aprendizaje matemático de los alumnos.

- Reconocer el sistema de *normas sociales y disciplinares* que restringen y posibilitan el desarrollo de los procesos de estudio matemático y aportan explicaciones plausibles de los fenómenos didácticos.

2. Competencias referidas a conocimientos didácticos específicos y valoración de la idoneidad didáctica:

- Conocer las aportaciones de la Didáctica de la Matemática a la enseñanza y aprendizaje de los bloques de contenidos y *procesos matemáticos* tratados en educación primaria (secundaria), y referidas a: desarrollo histórico (desde una perspectiva epistemológica) de los contenidos a enseñar, orientaciones curriculares, etapas de aprendizaje, tipos de errores y dificultades, patrones de interacción didáctica y sus efectos en el aprendizaje, uso de recursos tecnológicos y materiales manipulativos, propuestas de enseñanza experimentadas previamente, instrumentos de evaluación, etc. Estos conocimientos le van a permitir reconstruir un *significado de referencia* matemática y didáctica para los procesos de estudio pretendidos o implementados, y en consecuencia emitir un juicio valorativo sobre los mismos que oriente el incremento de la *idoneidad didáctica* de tales procesos (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007).

- Valorar la idoneidad didáctica de los procesos de estudio planificados o implementados en sus distintas dimensiones (*epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica*). Esta competencia supone para el profesor el desarrollo de una actitud positiva hacia la enseñanza de las matemáticas, de modo que valore tanto su papel formativo como su utilidad en la educación de los ciudadanos y profesionales.

El desarrollo de las competencias didácticas es un desafío complejo para los formadores de profesores por la diversidad de dimensiones y componentes a tener en cuenta. Una de tales dimensiones se refiere al análisis de los propios conocimientos matemáticos, para los cuales será necesario adoptar una visión amplia que reconozca el papel central de la actividad de resolver problemas en la generación del conocimiento.

En nuestro caso estamos experimentando la aplicación de *ciclos formativos* sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y su didáctica para futuros profesores, los cuales incluyen los siguientes tipos de situaciones – problemas de estudio matemático - didáctico:

1) Resolución de problemas de acuerdo a un modelo didáctico socio - constructivo - instruccional.

2) Reflexión epistémico - cognitiva sobre los objetos y significados[3] puestos en juego en la resolución de problemas.

3) Análisis de las interacciones en la clase de matemáticas.

4) Reconocimiento del sistema de normas que condicionan y soportan la actividad de estudio matemático.

5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio matemático experimentado.

En estos procesos de estudio se implementa una trayectoria didáctica que contempla las siguientes fases o momentos: 1) Presentación de las consignas; 2) Exploración personal; 3) Trabajo cooperativo en equipos para elaborar una respuesta compartida; 4) Presentación y discusión; 5) Institucionalización por el formador, explicitando los conocimientos pretendidos; 6) Estudio personal de documentos de trabajo seleccionados, apoyado por las tutorías individuales y grupales.

Un ciclo formativo de este tipo se describe en Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi (2008) basado en el estudio de nociones elementales de estadística a partir de un proyecto de análisis de datos. En las siguientes secciones presentamos otro caso basado en la resolución de un problema aritmético – algebraico.

3. ANÁLISIS DIDÁCTICO DE UN PROBLEMA ARITMÉTICO - ALGEBRAICO

La situación – problema que usamos para ilustrar el tipo de actividad matemática y didáctica que consideramos útil en la formación de profesores fue propuesta a una muestra de 84 estudiantes de magisterio en el marco de una asignatura dirigida a completar su formación matemática desde la perspectiva de la enseñanza. Los objetivos específicos de la actividad fueron:

- Crear una situación introductoria de reflexión sobre las propiedades y el algoritmo de la multiplicación de números naturales.

[3] Los objetos y significados matemáticos sobre los que se orienta la reflexión se describen en Godino, Batanero y Font (2007), así como los supuestos antropológicos que sirven de base al “enfoque ontosemiótico”. Los estudiantes son introducidos progresivamente en el reconocimiento de tales objetos y procesos, así como a la perspectiva plural y relativista del significado de los objetos matemáticos.

- Reflexionar y discutir sobre las características del razonamiento deductivo para probar una proposición frente a una comprobación empírica de casos.

- Promover el razonamiento algebraico al introducir notaciones simbólicas que facilitan la generalización de un problema aritmético.

- Analizar la *matemática en uso* puesta en juego en la solución del problema, esto es, los objetos matemáticos previos o requeridos para que el alumno se involucre en la solución, y los nuevos objetos y significados emergentes.

Los estudiantes trabajaron en una primera fase en equipos de entre 2 y 4 estudiantes, y debían escribir con detalle la resolución del problema. Transcurridos 30 minutos los estudiantes entregaron las hojas de respuestas, las cuales fueron usadas por el docente para organizar la puesta en común, discusión e institucionalización.

3.1. Una situación introductoria para la multiplicación

La situación – problema que presentamos a continuación pone en juego contenidos aritméticos y algebraicos, al tiempo que provoca la reflexión sobre el papel de la argumentación deductiva, su eficacia relativa y validez frente a las comprobaciones empíricas. Con este ejemplo ilustraremos un tipo de análisis epistémico–cognitivo[4] de actividades matemáticas que consideramos potencialmente útil para el desarrollo de competencias instrumentales y disciplinares – académicas del profesor de matemáticas.

Como situación introductoria al tema de la multiplicación de números naturales y al desarrollo del razonamiento algebraico elemental hemos propuesto a un grupo de 84 estudiantes el siguiente problema (Malaspina, 2007):

Pedro escribió en la pizarra los números 2, 5, 6 y 3.

a) Escoge tres de estos números, que sean diferentes entre sí, y escríbelos en las siguientes casillas, de modo que el producto de los números sea el **<u>mayor</u> posible**

$$\begin{array}{rl} \square\,\square & \times \\ \square & \\ \hline \end{array}$$

b) Juan dice que es capaz de elegir los tres números anteriores que dan el producto máximo sin necesidad de hacer **ninguna multiplicación**.

b1) ¿Es esto posible? ; b2) ¿Cuál podría ser el procedimiento de Juan? ; b3)¿Cómo se puede justificar? *Razonar las respuestas.*

c) Pedro propone ahora este desafío:

[4] El término epistémico se usa aquí para referir a los conocimientos matemáticos puestos en juego en la solución esperada al problema, mientras que cognitivo a los conocimientos efectivamente desplegados por los estudiantes.

Dados cinco números naturales cualesquiera de una cifra (***a, b, c, d, e***), se deben elegir tres de esos números para formar el **multiplicando** y otro más para formar el **multiplicador**. Describe y justifica un procedimiento para elegir los números de manera que el producto sea el **menor posible**.

3.2. Soluciones esperadas

Una primera solución "ingenua" que podemos encontrar, como se describe en Malaspina (2007), consiste en probar con las distintas ternas de números que se pueden formar, calcular los productos y encontrar el mayor de ellos. Si se prueban sistemáticamente las 24 selecciones posibles este procedimiento de comprobación exhaustiva de casos proporciona la solución del problema. Pero se ve que es bastante ineficaz.

Para el apartado b) el procedimiento de Juan será:

1) Descartar el número 2 porque al ser el menor, su multiplicación por cualquiera de los restantes dará un producto menor.

2) Elegir como multiplicador el mayor, 6, como decena del multiplicando el 5 y como unidad el 3. No se puede conmutar el 6 por el 5 porque 6 x 3 es mayor que 5 x 3. La solución es, por tanto, 53 x 6 = 318.

Para la generalización que se pide en el apartado c) el procedimiento será el siguiente:

1) Ordenar de menor a mayor los números dados; por ejemplo, suponer que el orden alfabético de las letras dadas se corresponde con el orden de los números, o sea: $a < b < c < d < e$

2) Descartar los dos números mayores, *d* y *e*, ya que "*a menor factor, menor producto*", y en este caso se trata de hallar el menor producto posible.

3) Elegir como multiplicador el menor número, *a,* como decena del multiplicador *b* y como unidad, *c*. La solución es, por tanto, $bc \times a$.

El apartado a) del problema requiere hallar el máximo de una función P de tres variables, *x*, y, *z*, que toman sus valores en un mismo dominio: el conjunto finito formado por los números {2, 5, 6, 3}. Las variables se corresponden con las decenas y unidades del multiplicando, y la unidad del multiplicador (P = f(x, y, z); P = $xy \times z$).

El procedimiento empírico de solución requiere, para su validez, de la comprobación exhaustiva de las 24 selecciones combinatorias posibles y de la elección de aquella que da como resultado el mayor producto.

El procedimiento deductivo se basa en las propiedades del sistema de numeración decimal y en el uso de la siguiente propiedad de la multiplicación de números naturales: "a mayor factor, mayor producto". El apartado b) del problema pretende promover la aplicación de esta técnica deductiva.

El apartado c) pone en juego competencias de razonamiento algebraico (uso de notaciones simbólicas para expresar las variables, que facilitan la generalización del dominio de definición de las variables al intervalo [0, 9] de números naturales).

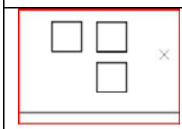
Los apartados a) y b) se pueden proponer en 5º o 6º de educación primaria. El apartado c) puede ser idóneo para secundaria y en cursos de formación de profesores, que es el uso aquí descrito.

En la siguiente sección realizamos un análisis sistemático de los conocimientos explícitos e implícitos que se ponen en juego en la realización de esta actividad, usando algunas nociones teóricas del "enfoque ontosemiótico" del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2007). Consideramos que la realización de este tipo de análisis es potencialmente útil para los profesores de matemáticas, pudiéndose aplicar tanto a las soluciones esperadas desde el punto de vista del profesor, como a las soluciones dadas por los estudiantes. El análisis de la "matemática en acción" que realizamos en este trabajo debería ser una competencia instrumental y disciplinar – académica del profesor de matemáticas al permitirle reconocer la complejidad de objetos y procesos matemáticos puestos en juego en las actividades matemáticas, prever potenciales conflictos, adaptarlas a las capacidades de sus estudiantes y a los objetivos de aprendizaje.

4. CONFIGURACIÓN DE OBJETOS Y SIGNIFICADOS

En el "enfoque ontosemiótico" del conocimiento matemático (Godino, Batanero y Font, 2007) se ha introducido la noción de configuración de objetos y significados como recurso para describir las prácticas matemáticas puestas en juego en la resolución de una situación – problema. Esta noción permite ampliar el foco de atención desde las representaciones hacia el conglomerado de entidades referidas por las mismas y los roles que desempeñan en la actividad matemática (Font, Godino y D'Amore, 2007). Seguidamente identificamos los tipos de objetos o entidades primarias puestas en juego en la solución del problema, agrupadas en las siguientes categorías: elementos lingüísticos, conceptos (entendidos aquí como entidades que tienen una definición), procedimientos, propiedades y argumentos; así mismo, distinguimos las entidades que se pueden considerar como previas o intervinientes, de las entidades nuevas o emergentes de la actividad. En cuanto a los procesos matemáticos implicados comenzamos por identificar los procesos de significación, esto es, explicitando a qué se refieren los objetos o qué papel desempeñan (funciones semióticas). Así mismo, formulamos hipótesis sobre conflictos semióticos potenciales al comparar los significados institucionales pretendidos con los significados personales descritos en la bibliografía, o en experiencias previas.

4.1. Elementos lingüísticos

OBJETOS:	SIGNIFICADOS:
Previos:	
"Escoge tres de estos números …"	Selección de una muestra de tres dígitos entre cinco dados, usar dos de ellos como multiplicando y el otro como multiplicador
producto de los números;	Resultado de la operación de multiplicar
mayor posible	Máximo del conjunto de productos obtenidos al formar todas las selecciones posibles de tres números
	Indica de manera icónica las variables de los distintos dígitos que deben formar el multiplicando, el multiplicador, la operación (x) y el lugar donde se debe escribir el producto
símbolos alfabéticos (a, b, c, d, e)	"números naturales cualesquiera de una cifra"
Emergentes:	

5 3 × 6 = 318	Selección de números que da como producto el valor máximo
Escritura sistemática de todas las selecciones posibles, o una expresión en lenguaje natural basada en la propiedad de “mayor factor, mayor producto”.	Argumentación de que el producto de la selección elegida es máximo.

Conflictos potenciales:

- Se puede esperar que los alumnos hagan una escritura parcial del conjunto de selecciones combinatorias sin aportar razones de que no es necesario escribirlas.

- La expresión “números cualesquiera (a, b, c, d, e)” puede interpretarse en el sentido de que se pueden dar valores particulares (1, 2, 3, 4, 5), “los que uno quiera” y mostrar la solución para dicho caso.

- Explicación escrita parcial o incorrecta de los procedimientos y justificaciones, tanto en el caso b) como en el c).

4.2. Conceptos/ definiciones

OBJETOS:	SIGNIFICADOS:
Previos:	
Números	Secuencia recursiva de símbolos que se combinan según ciertas reglas para formar otros de 2 y 3 cifras; numeración decimal; unidades, decenas y centenas
Multiplicación de números naturales; factores, producto	Operación aritmética; dados dos números naturales (multiplicando, multiplicador) la multiplicación de dichos números consiste en obtener un tercero (producto),…
Igualdad	Resultado de una operación aritmética
Variable	Símbolo (literal o icónico) que puede tomar los diversos valores de un conjunto de números
Función; P = f(x, y, z); definida en A ={2, 5, 6, 3}, y en el intervalo [0,9] en *N*.	El producto depende de los valores que se den a las unidades y decenas de los factores.
Ordenación, mayor, máximo de un conjunto	Ordenación y extremo superior del conjunto formado por los productos de todas las selecciones posibles.
Emergentes:	
Selección combinatoria de ternas de números	Forman el multiplicando y el multiplicador de las multiplicaciones pedidas.
Conjunto de selecciones	Dominio de definición de la función P cuyo máximo se debe encontrar.
Multiplicando y multiplicador	Desempeñan un papel necesario (no es indiferente poner el 6 en el multiplicador como unidad o en la decena del multiplicando)
Procedimiento Justificación	Usando estos conceptos se plantean dos nuevos problemas: hallar un procedimiento más eficaz que la construcción de todas las selecciones y justificar la validez del nuevo procedimiento de manera deductiva, no empírica.
Razonamiento	Descripción detallada del procedimiento y de su justificación

Conflictos potenciales:

- Los alumnos pueden no estar familiarizados con los conceptos metamatemáticos de procedimiento, justificación, razonamiento.

- El concepto de función se usa de manera tácita (no ostensiva); al tratarse de una función de tres variables P(x, y, z) los alumnos puede que no identifiquen esta función en la situación al no estar familiarizados con este tipo de funciones.

4.3. Propiedades:

OBJETOS:	SIGNIFICADOS:
Previas:	
Reglas del sistema de numeración decimal (1 decena = 10 unidades)	Se usa en la escritura posicional de los números y en el algoritmo de la multiplicación.
Hechos aritméticos básicos (tablas de multiplicar y sumar)	Se usan en el algoritmo de la multiplicación
Propiedades asociativa, conmutativa y distributiva	Justifican el algoritmo de la multiplicación
Emergentes:	
P1: "Mayor (menor) factor, mayor (menor) producto".	Justifica el procedimiento que proporciona la solución óptima
P2: En las condiciones dadas, la selección de números que se debe tomar es 53 x 6 ya que su producto 318 es el mayor posible.	Este enunciado constituye la solución del problema b2)
P3: Si $a<b<c<d<e$, bc x a da el menor producto	Este enunciado constituye la solución del problema c)

Conflictos potenciales:

- No encontrar la propiedad P1, la P2, o la P3

4.4. Procedimientos

OBJETOS:	SIGNIFICADOS:
Previos:	
Algoritmo de multiplicar un número de dos cifras por otro de una.	Se usa para obtener los productos pedidos.
Formación sistemática de las selecciones posibles de tres números (variaciones de 4 elementos tomados de dos en dos, por permutaciones de dos, o sea, 24)	Se usa para formar todos los productos posibles y poder encontrar el máximo.
Emergentes:	
b2) Descartar el 2; tomar como multiplicador el mayor, 6; tomar como multiplicando el 53.	Proporciona la solución óptima del problema (53 x 6 = 318)
c) Ordenar, $a<b<c<d<e$, descartar e, …	Proporciona la solución general pedida en el caso c)

Conflictos potenciales:

- No ser capaz de formar todas las selecciones combinatorias

- No encontrar el procedimiento para el caso b2)

- No encontrar el procedimiento para el caso c)

4.5. Argumentos

OBJETOS:	SIGNIFICADOS:
Previos:	
Comprobación empírica exhaustiva de las 24 posibles selecciones de los factores, o una parte de ellas.	Proporciona una solución ineficaz del problema de la parte a)
Emergentes:	
A1: Teniendo en cuenta que “a mayor factor menor producto” se descarta el 2, al tomar como multiplicador el 6 y al tomar como decena del multiplicando el 5.	Justificación deductiva de la proposición que afirma la solución óptima del problema en el cas b3)
A2: Si $a<b<c<d<e$ se comienza por descartar e porque al ser el mayor dará mayor producto, …	Justificación deductiva de la proposición que establece la solución óptima del problema en el caso c)

Conflictos potenciales:

- No formular correctamente los argumentos A1 y A2

5. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES

El problema analizado en los apartados anteriores fue usado como una situación introductoria en uno de los temas de matemáticas para maestros en un curso de formación inicial de profesores. En una primera fase los estudiantes resolvieron el problema en equipos de entre 2 y 4 estudiantes, entregando al finalizar de esta fase al profesor una hoja con la solución, quien seguidamente organizó el debate correspondiente, tomando algunas de las soluciones dadas por los equipos como punto de partida. Esta técnica didáctica permite acceder a los significados iniciales de los estudiantes sobre los distintos objetos puestos en juego en la resolución y partir de ellos para promover los nuevos aprendizajes.

Seguidamente resumimos las respuestas dadas por el conjunto de los distintos equipos.

Para el apartado a) del problema encontramos que de los 24 equipos 5 de ellos (20,8%) hacen solo una multiplicación, dándose cuenta, por tanto, que se puede obtener la selección de números que da el producto máximo teniendo en cuenta las propiedades del sistema de numeración y las propiedades de la multiplicación de números naturales. Pero 9 equipos (37.5 %) hacen más de 4 intentos (alguno de ellos hasta 9), y 10 (41,6 %) hacen 2 o 3 multiplicaciones, sin dar ninguna justificación de que no es necesario realizar las restantes posibles.

En la tabla 1 resumimos los tipos de respuestas, con las frecuencias y porcentajes de cada tipo, en los apartados b) y c). Hay que resaltar que el 33,2% no justifica, o lo hace incorrectamente, el procedimiento de hallar el producto máximo sin realizar ninguna multiplicación, y el 41,6% no logra hacer la generalización del enunciado.

La tabla 2 incluye las respuestas dadas por uno de los equipos que no logró resolver bien el problema ni elaborar argumentos pertinentes. Vemos que realizó ocho multiplicaciones antes de concluir que la solución es 53 x 6 =318, no descartando el 2 como posible dígito del multiplicando, tanto en las unidades como en las decenas. No argumentan porqué no continúan haciendo las restantes comprobaciones. En el apartado b) describen, de manera incompleta, el procedimiento (poner el número más grande …). En el apartado c) la expresión “Dados cinco números naturales cualesquiera”, a pesar de que se les sugiere el uso de las letras para expresar tales números, optan por razonar con un caso concreto, usando los números 1, 2, 3, 4, 5 y también en este caso de manera incompleta.

Tabla 1: Tipos de respuestas, frecuencia y porcentaje

Apartado b)	Frecuencia	%
Justifica bien	12	50,0
Justifica moderadamente bien	4	16,6
No justifica/ incorrectamente	8	33,2
TOTAL	24 equipos	

Apartado c)	Frecuencia	%
Generaliza bien	4	16,6
Generaliza moderada-mente bien	10	41,6
No generaliza	10	41,6
TOTAL	24 equipos	

Tabla 2: Respuestas de un equipo que no logró generalizar

a) $\boxed{5}\boxed{3} \times \boxed{6} = 318$	$65 \times 3 = 195$; $56 \times 3 = 168$; $63 \times 5 = 315$; $36 \times 5 = 180$; $53 \times 6 = \boxed{318}$; $52 \times 6 = 312$; $25 \times 6 = 150$; $25 \times 3 = 75$
b) b1) ¿Es esto posible? Sí, b2¿Cuál podría ser el procedimiento de Juan? Poner el número más grande de manera que cuando multiplique por la decena, saldrá el número mayor. b3)¿Cómo se puede justificar?	
c) Los números serían: 1, 2, 3, 4, 5 $\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4} \times \boxed{1} = 234$ Colocaría el menor de los números en el multiplicador, y el siguiente más pequeño en el multiplicando (decena), así, al multiplicar saldrá el menor número.	

En la tabla 3 resumimos los tipos de objetos, significados y conflictos que encontramos en las respuestas del equipo considerado, como ejemplo ilustrativo de la caracterización de las configuraciones cognitivas, usando las herramientas teóricas descritas en la sección 4.

Tabla 3: Configuración cognitiva de un equipo que no logró generalizar

Tipos de objetos	**Significados /Conflictos**
LENGUAJES: - Ejemplos de selecciones posibles de números usados como multiplicando y multiplicador. - Escritura de la multiplicación con los factores dispuestos en columna. - Descripción de procedimientos y justificaciones incompletas.	- Atribuyen significado correcto a los términos y expresiones usadas en el enunciado, incluyendo el formato de la multiplicación en columnas que reproducen fielmente. - Rigidez en la forma de escribir las multiplicaciones, siguiendo el formato del enunciado. - Forma incompleta y deficiente de expresar procedimientos y argumentos.

CONCEPTOS: - Decena, centena - Multiplicación; producto máximo	- Uso correcto
- Procedimiento - Conjunto de selecciones posibles;	- No reconocen el conjunto completo de configuraciones posibles.
- “Número cualquiera”	- El número cualquiera es interpretado como un caso “particular específico”.
PROCEDIMIENTOS: - Multiplicación por una cifra	- Uso correcto
- Comprobación de casos en a) y b)	- No comprueban todos los casos posibles
- Dan valores particulares a las variables en c)	- No logran describir el procedimiento general para lograr el producto mínimo en las condiciones dadas (suponer un orden en las variables a, b, ..., etc.)
PROPIEDADES: - Reglas del sistema de numeración decimal y del algoritmo de la multiplicación.	- Uso correcto
-No reconocen la propiedad “a mayor factor, mayor producto” en a)	- No descantan el uso del número 2.
ARGUMENTOS. - Comprobación parcial de casos (a)	- No logran hacer la comprobación exhaustiva de casos
- Uso de un caso particular como “elemento genérico”	- No argumentan deductivamente

6. REFLEXIÓN EPISTÉMICO – COGNITIVA DE LOS PROFESORES EN FORMACIÓN

En la primera fase del ciclo formativo que aplicamos a los profesores en formación les proponemos la resolución de un problema matemático, convenientemente seleccionado con el fin de que desarrollen su competencia en temas matemáticos relacionados con la profesión docente. La trayectoria didáctica del estudio matemático que implementamos contempla fases o momentos de exploración personal del problema, trabajo colaborativo en equipo, formulación y validación de las situaciones aportadas. Estos momentos de tipo socio-constructivista son complementados con momentos de institucionalización, ejercitación y estudio personal de fuentes documentales seleccionadas, los cuales aportan un componente instruccional al modelo didáctico.

Pero la formación del profesor de matemáticas no debe limitarse a desarrollar competencias matemáticas adquiridas mediante un modelo didáctico determinado, el cual pueden tratar de imitar con sus propios alumnos. Es necesario que desarrollen, además, competencias de reflexión y análisis sobre la propia actividad matemática y de los conocimientos puestos en juego en la misma, a fin de que puedan seleccionar o adaptar problemas matemáticos idóneos, y reconstruir las configuraciones de objetos y significados puestos en juego en las mismas.

Con este fin hemos diseñado un tipo de situaciones de análisis epistémico-cognitivo basadas en el planteamiento de la siguiente consigna, tras la realización de una actividad matemática como la descrita en la sección 2:

¿Qué conocimientos matemáticos se ponen juego en la resolución del problema? Completar *la tabla adjunta indicando los objetos matemáticos y significados puestos en juego.*

Objetos[5]:	Significados:
Situaciones - problemas	
Elementos lingüísticos	
Conceptos - definición	
Propiedades	
Procedimientos	
Argumentos	
Conflictos:	

Con esta consigna se pretende que los estudiantes reconozcan, además de los conceptos y procedimientos, el papel de los distintos lenguajes usados y significados atribuidos a términos y expresiones, los tipos de justificaciones de propiedades y procedimientos, los procesos de argumentación y generalización. Se trata de crear el punto de partida para que el profesor en formación realice un tipo de análisis como el incluido en la sección 4. El objetivo es que el profesor sea consciente de la trama de objetos y significados que se ponen en juego en los procesos de estudio matemático que deberán diseñar, implementar y evaluar.

Para abordar estas cuestiones de análisis epistémico – cognitivo implementamos, de nuevo, una trayectoria didáctica que contempla los momentos:

- Exploración personal
- Trabajo colaborativo en el seno de un equipo para discutir las propuestas y elaborar una respuesta compartida.
- Presentación y discusión en el grupo – clase
- Institucionalización realizada por el formador.

Esta situación – problema de "análisis epistémico – cognitivo" la estamos experimentando con diversos grupos de estudiantes y diferentes problemas matemáticos elementales. Como primeras conclusiones de estas experiencias podemos decir que la actividad es un reto para los futuros profesores, resultando conflictiva la identificación y discriminación de los tipos de objetos y significados, ya que usualmente supone un cierto nivel de actividad metacognitiva a la que no están habituados.

7. REFLEXIONES FINALES

El análisis que hemos incluido en las secciones anteriores, usando algunas nociones teóricas del "enfoque ontosemiótico", ha sido realizado por los investigadores como elemento de referencia y reflexión sobre los tipos de objetos y significados matemáticos puestos en juego por los estudiantes. Hemos podido determinar las carencias de esta muestra de estudiantes respecto de los conocimientos matemáticos puestos en juego, en particular las dificultades que tienen para usar las notaciones

[5] En la versión entregada a los estudiantes se incluye un ejemplo de cada tipo de entidad matemática para orientar la realización de la actividad.

simbólicas como recursos para la generalización; también hemos constatado el anclaje de estos estudiantes en razonamientos de tipo empírico.

Aunque este tipo de análisis se revela útil para el formador de profesores, consideramos que es posible y deseable capacitar a los futuros profesores para realizar análisis similares de sus propias experiencias de enseñanza y aprendizaje. En nuestro proyecto de investigación en curso sobre "Evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico del profesor de matemáticas" la resolución de problemas ocupa un lugar central para el desarrollo de competencias matemáticas. Pero la actividad de resolución se complementa con la reflexión epistémico – cognitiva provocada por las consignas: *¿Qué matemáticas se pone en juego en la resolución del problema? ¿Qué matemática ha puesto en juego el alumno*?; estas preguntas son apoyadas mediante el uso de las herramientas teóricas del "enfoque ontosemiótico", concretadas en este caso en el instrumento mencionado.

El tipo de análisis de la "matemática en acción" que realizamos en este trabajo debería ser una competencia instrumental del profesor de matemáticas al permitirle reconocer la complejidad de objetos y significados matemáticos puestos en juego en las actividades matemáticas, prever potenciales conflictos, adaptarlas a las capacidades de sus estudiantes y a los objetivos de aprendizaje. Se trata de diseñar e implementar situaciones didácticas para la formación de profesores cuyo objetivo central sea el meta-análisis (Jaworski, 2005) de un componente clave de la enseñanza: la actividad matemática entendida tanto desde el punto de vista institucional (o socio-epistémico) como personal (o cognitivo).

Como hemos indicado en la sección 2, el ciclo formativo que estamos experimentando con los futuros profesores incluye, además de las situaciones de estudio matemático de problemas seleccionados y de la reflexión epistémico-cognitiva correspondiente, otros tres tipos de análisis y reflexión: análisis de las interacciones en el aula, reconocimiento de las normas que condicionan y soportan la actividad de estudio matemático y valoración de la idoneidad didáctica global de experiencias de enseñanza y aprendizaje. Por razones de espacio no incluimos en este trabajo estos análisis aplicados al caso de la resolución del problema aritmético – algebraico desarrollado en los apartados anteriores. Remitimos al lector a las referencias citadas donde se describen los análisis mencionados, en particular, en Godino, Font y Wilhelmi (en prensa) se presentan las principales herramientas teóricas del "enfoque ontosemiótico" mediante el análisis de una experiencia de enseñanza del análisis elemental de datos.

Reconocimiento:

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER.

REFERENCIAS

Font, J. D., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An ontosemiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27 (2), 3-9.

Godino, J. D. (2002) Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22 (2/3), 237-284.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2): 127-135. [Versión en español, ampliada y actualizada disponible en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino]

Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.*

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (en prensa). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *PUBLICACIONES.* Revista de la Facultad de Educación y Humanidades de Melilla.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma,* XXVII (2), 221-252.

González, J. y Wagenaar, R. (2003). *Tuning educational structures in Europe. Final Report. Phase one*. Bilbao: Universidad de Deusto. http://europa.eu.int/comm/education/policies/educ/tuning/tuning_es.html

Jaworski, B. (2005). Tools and tasks for learning and meta-learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 359-361.

Malaspina, U. (2007). El rincón de los problemas. *UNIÓN*, 11, 197-204.

Tejada, J. (1999). Acerca de las competencias profesionales (I). *Herramientas*, 56, 20-30.